dev : $\mathcal{A}(E)$ simple

Leçons : 103, 104, 105, 108.
Réf : Rouchy. p 217.

Thm : $|E| = n \geq 3$. $\mathcal{A}(E)$ est simple $\Leftrightarrow n \neq 4$.

dem :

① $n=3$: $|\mathcal{A}(E)| = \frac{3!}{2} = 3$ donc par le théorème de Lagrange, les seuls sous-groupe de $\mathcal{A}(E)$ sont $\{Id_E\}$ et $\mathcal{A}(E)$ d'où $\mathcal{A}(E)$ simple.

② $n=4$: $E = \{a\ b\ c\ d\}$.
Considérons $H = \{ id_E, (a\,b)(c\,d), (a\,c)(b\,d), (a\,d)(b\,c)\}$.
On peut mq $H < \mathcal{A}(E)$ et comme le conjugué d'une double transposition à SD est une double transposition à support disjoints, $H \trianglelefteq \mathcal{A}(E)$.
$\mathcal{A}(E)$ n'est pas simple.

③ $n \geq 5$:
Soit $H \trianglelefteq \mathcal{A}(E)$ tq $H \neq \{id_E\}$. Mq $H = \mathcal{A}(E)$.

i) Si H contient un 3-cycle, par conjugaison H contient tous les 3-cycles et comme les 3 cycles engendrent $\mathcal{A}(E)$ on a $\mathcal{A}(E) \subset H$ d'où $\mathcal{A}(E) = H$.

ii) Supposons que H contiennent une double transposition à SD :
$\sigma = (a\,b)(c\,d) \in H$.
Comme $|E| = 5$; $\exists\, e \in E \setminus \{a,b,c,d\}$.
$\tau := (a\ b\ e)$.
On a : $\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = \tau(c\,d)(a\,b)\tau^{-1}$
$= \tau(c\,d)\tau^{-1}\tau(a\,b)\tau^{-1}$
$= (\tau(c)\ \tau(d))\ (\tau(a)\ \tau(b))$
$= (c\ d)(b\ e)$
Ainsi $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = (a\,b)\cancel{(c\,d)}\cancel{(c\,d)}(b\,e) = (a\ b\ e)$.
De plus :
$\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H \underset{\text{car } H \trianglelefteq \mathcal{A}(E)}{\Rightarrow} \tau\sigma^{-1}\tau \in H \Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}\tau \in H$. ⊛
H contient un 3 cycle donc par i) $H = \mathcal{A}(E)$

Montrons alors que H contient un 3 cycle ou une double transposition à SD.
Soit $\sigma \in H \setminus \{id_E\}$ ok car $H \neq \{id_E\}$
Considérons sa décomposition en cycles à SD : $\sigma = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i$

a) Supposons σ_i est un 3-cycle pour tout i.
* Si $r=1$, σ est un 3-cycle et $H = \mathcal{A}(E)$
* supposons $r \geq 2$. Notons $\sigma_1 = (a\ b\ c)$ $\sigma_2 = (d\ e\ f)$ [quitte à renuméroter les σ_i]
$\tau := (a\,d)(b\,e)$
$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(d))(\sigma(b)\ \sigma(e)) = (b\ e)(c\ f)$
$\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} = \underbrace{(b\,e)(c\,f)(b\,e)}_{\text{car SD de commutent}}(a\,d) = (c\,f)(a\,d) \in H$ ∈ comme préc ⊛

donc $H = \mathcal{A}(E)$.

b) Supposons σ_1 n'est pas un 3-cycle (quitte à renuméroter)
Soit $F \subset E$ tq $|F| = 3$ et $|F \cup \sigma(F)| = 4$. (admis provisoire I)
Soit $\tau \in \sigma(E)$ tq $Supp(\tau) = F$. τ est donc un 3 cycle, donc $\tau \in \mathcal{A}(E)$.

car $|F \cup \sigma(F)| \neq 4|F|$

De plus, $\mathrm{supp}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \sigma(F) \neq F = \mathrm{supp}(\tau)$
donc $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq \tau \Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \neq Id_E$
$\mathrm{supp}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \subset \mathrm{supp}(\sigma\tau\sigma^{-1}) \cup \mathrm{supp}(\tau^{-1}) = \sigma(F) \cup F.$
est donc de cardinal ≤ 4, c'est
petit F
et $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \in H$ $\mathcal{A}(E)$
→ soit 3 cycle : gagné
→ soit double transpo SD : gagné
→ soit transpo : imp car signature 1
→ soit 4-cycle : ______

On a donc $H = \mathcal{A}(E)$.

dem F :
cas 1 : $\exists i$, σ_i de longueur ≥ 4 ; $\sigma_i = (a\ b\ c\ d\ \dots)$
On pose $F = \{a\ b\ c\}$
cas 2 : σ_i que des cycles de longueur 2 ou 3.
Par hyp il y en a un de longueur 2 et comme la signature est 1,
il y en a 2 : $(a\ b)\ (c\ d)$
$F = \{a\ b\ c\}$.

→ pq $\mathcal{A}(E)$ engendré par 3-cycles ?
$\mathfrak{S}(E)$ eng par les transpositions donc $\forall\ \sigma = \tau_1 \dots \tau_r$ r doit ê paire.
→ prod de 2 transpo eng $\mathcal{A}(E)$.
Puis mq prod de 2 transpo = 3-cycle. cas 1 m supp $\tau_1\tau_1 = id_E$ ok
cas 2, $\tau_1 = (a\ b)$ $\tau_2 = (b\ c)$: $\tau_1\tau_2 = (a\ b\ c)$ ok
cas 3 τ_1, τ_2 supp disj : $\tau_1\tau_2 = (a\ b)(c\ d) = (a\ c\ b)(a\ c\ d)$.